Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Белорусский государственный педагогический университет
имени Максима Танка»

П. И. Кибалко, В. А. Шилинец

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ–ЗАОЧНИКОВ

Методические рекомендации

Минск 2007

УДК 51
ББК 22.1
М545

Печатается по решению редакционно-издательского совета БГПУ, рекомендовано секцией физико-математических и технических наук (протокол № от)

Рецензенты:
кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой математики МГВРК Л. И. Майсеня;
доктор педагогических наук, заведующий кафедрой алгебры и геометрии В. В. Шлыков

Кибалко П. И., Шилинец В. А.
М545 Методические указания и контрольные задания по математике для студентов–заочников/ П. И. Кибалко, В. А. Шилинец.— Мн.: БГПУ, 2007. — 29 с.
ISBN

Издание содержит учебную программу, варианты контрольных заданий и образцы решения типовых задач по математике.
Адресуется студентам–заочникам факультета психологии БГПУ.

УДК 51
ББК 22.1

ISBN

Требования к выполнению и оформлению контрольной работы

1. Контрольная работа выполняется в отдельной тетради школьного формата. Следует пронумеровать страницы и оставить на них поля не менее 3 см для замечаний преподавателя.

2. На обложке тетради следует разборчиво написать свою фамилию, инициалы и адрес, номер группы, название дисциплины, номер варианта контрольной работы и дату отправления работы в университет.

3. Работа должна быть выполнена чернилами одного цвета, аккуратно и разборчиво.

4. Каждую задачу надо начинать с новой страницы. Решения задач следует располагать в порядке номеров, указанных в задании, номера задач следует указывать перед условием. Условия задач обязательно переписываются полностью в тетрадь. В том случае, когда несколько задач имеют общую формулировку, переписывая условие, следует заменить общие данные конкретными.

5. При оформлении записей в тетради необходимо придерживаться общих требований к культуре их ведения. Перечислим важнейшие из них:

а) студенты должны соблюдать абзацы, всякую новую мысль следует начинать с красной строки;

б) важные формулы, равенства, определения лучше выделять в отдельные строки, чтобы сделать их более обозримыми;

в) при описании решения задачи краткая запись условия отделяется от решения и в конце решения ставится ответ;

г) необходимо правильно употреблять математические символы.

6. Решения задач должны сопровождаться краткими, но достаточно обоснованными пояснениями, используемые формулы нужно выписывать.

7. Чертежи следует выполнять карандашом с использованием чертежных инструментов, соблюдая масштаб.

8. В конце работы следует указать литературу, которой вы пользовались, проставить дату выполнения работы и подпись.

9. Если в работе допущены недочеты и ошибки, то студент должен выполнить все указания преподавателя, сделанные в рецензии, в этой же тетради.

Если работа не зачтена, то после выполнения указаний рецензента, следует прислать ее на повторную проверку.

10. Контрольная работа должна быть выполнена в срок в соответствии с учебным планом (графиком). В период сессии работа на проверку не принимается.

11. Работа, выполненная не по своему варианту, не учитывается и возвращается студенту без оценки.

12. Студенты, не имеющие зачетов по контрольной работе, к зачету по изучаемой дисциплине не допускаются.

Программа курса «Математика»

Множество действительных чисел

Первоначальные сведения о множествах. Соответствия между множествами. Множество действительных чисел. Взаимно однозначное соответствие между множеством действительных чисел и множеством точек прямой. Модуль действительного числа. Числовые промежутки. Верхняя и нижняя грани числового множества.

Элементы аналитической геометрии

Декартова прямоугольная система координат. Полярные координаты. Прямая линия. Кривые второго порядка.

Функции, пределы, непрерывность

Определение и способы задания функции. Обзор элементарных функций. Предел функции. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Основные теоремы о пределах. Непрерывность функции. Непрерывные и разрывные функции в биологии.

Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Понятие производной и ее геометрический смысл. Правила дифференцирования и производные элементарных функций. Дифференциал функции. Свойства дифференцируемых функций. Возрастание и убывание функции. Максимумы и минимумы. Построение графиков функций.

Интегральное исчисление функции одной переменной

Первообразная и неопределенный интеграл. Основные методы интегрирования. Интегрирование дробно–рациональных функций и некоторых тригонометрических выражений.

Понятие определенного интеграла. Основные свойства определенного интеграла. Геометрическое приложение определенного интеграла. Биологические приложения определенного интеграла.

Линейная алгебра

Определители. Определение и свойства. Вычисление определителей. Решение систем линейных уравнений. Прямоугольные матрицы и их свойства. Квадратные матрицы. Приложение матриц. Матрицы в биологических исследованиях.

Элементы теории вероятностей и математической статистики

Основные понятия. Определение вероятности. Свойства вероятностей. Случайные величины. Математическое ожидание дискретной случайной величины. Дисперсия дискретной случайной величины. Некоторые законы распределения случайных величин. Генеральная совокупность и выборка. Оценки параметров генеральной совокупности по ее выборке. Доверительные интервалы для параметров нормального распределения. Проверка статистических гипотез. Линейная корреляция.

Контрольная работа

Задание 1

В задачах каждого варианта даны координаты вершин треугольника ABC.

Требуется найти: 1) длину стороны AB; 2) уравнение стороны AB и её угловой коэффициент; 3) уравнение медианы, проведенной из вершины B; 4) координаты точки пересечения медиан; 5) уравнение высоты, опущенной из вершины C на сторону AB; 6) расстояние от вершины C до стороны AB; 7) уравнение окружности, для которой AB есть диаметр.

В-1.	$A(-7;-1)$,	$B(1;-7)$,	$C(6;5)$.	В-2.	$A(2;2)$,	$B(-1;6)$,	$C(5;-2)$.
В-3.	$A(3;-1)$,	$B(11;-7)$,	$C(16;5)$.	В-4.	$A(4;1)$,	$B(-1;13)$,	$C(5;5)$.
В-5.	$A(-7;-4)$,	$B(1;-10)$,	$C(6;2)$.	В-6.	$A(3;-7)$,	$B(0;-3)$,	$C(-3;0)$.
В-7.	$A(8;-2)$,	$B(0;-4)$,	$C(5;8)$.	В-8.	$A(-4;-4)$,	$B(2;4)$,	$C(5;0)$.
В-9.	$A(-11;-7)$,	$B(-3;-13)$,	$C(2;-1)$.	В-10.	$\mathrm{A}(3;-2)$,	$B(-3;6)$,	$C(0;2)$.
В-11.	$A(1;-4)$,	$B(9;-10)$,	$C(14;2)$.	В-12.	$A(-6;-1)$,	$B(-1;11)$,	$C(5;3)$.
В-13.	$A(-1;-1)$,	$B(7;-7)$,	$C(12;5)$.	В-14.	$A(5;3)$,	$B(2;-1)$,	$C(-4;7)$.
В-15.	$A(-6;-6)$,	$B(2;-12)$,	$C(7;0)$.	В-16.	$A(10;1)$,	$B(-2;-8)$,	$C(4;0)$.
В-17.	$A(-5;-2)$,	$B(3;-8)$,	$C(8;4)$.	В-18.	$A(-6;-6)$,	$B(-1;6)$,	$C(2;2)$.
В-19.	$A(-9;-5)$,	$B(-1;-11)$,	$C(4;1)$.	В-20.	$A(-7;6)$,	$B(-4;2)$,	$C(2;10)$.
В-21.	$A(-6;-4)$,	$B(-10;-1)$,	$C(6;1)$.	В-22.	$A(-2;6)$,	$B(1;4)$,	$C(-5;-4)$.
В-23.	$A(1;-2)$,	$B(7;6)$,	$C(-11;3)$.	В-24.	$A(4;4)$,	$B(-8;-5)$,	$C(-3;-4)$.
В-25.	$A(8;2)$,	$B(14;10)$,	$C(-4;-7)$.	В-26.	$A(-3;-7)$,	$B(2;5)$,	$C(8;-3)$.
В-27.	$A(12;0)$,	$B(18;8)$,	$C(0;5)$.	В-28.	$A(-4;5)$,	$B(8;-4)$,	$C(3;8)$.
В-29.	$A(2;-1)$,	$B(8;7)$,	$C(-10;4)$.	В-30.	$A(-8;-5)$,	$B(-5;1)$,	$C(1;-7)$.
В-31.	$A(14;-6)$,	$B(20;2)$,	$C(2;-1)$.	В-32.	$A(-8;2)$,	$B(4;-7)$,	$C(-1;5)$.
В-33.	$A(3;4)$,	$B(-1;7)$,	$C(15;9)$.	В-34.	$A(3;8)$,	$B(0;4)$,	$C(6;-4)$.
В-35.	$A(5;-3)$,	$B(1;0)$,	$C(17;2)$.	В-36.	$A(2;-5)$,	$B(-1;-1)$,	$C(5;7)$.
В-37.	$A(2;-4)$,	$B(-2;-1)$,	$C(14;1)$.	В-38.	$A(5;-2)$,	$B(2;2)$,	$C(-4;-6)$.
В-39.	$A(-2;-6)$,	$B(-6;-3)$,	$C(10;-1)$.	В-40.	$A(-9;-5)$,	$B(-1;-11)$,	$C(4;1)$.

Задание 2

Найти область определения функции.

В-1. $f(x)=\sqrt{x+3}-\arcsin\frac{x+2}{3}$.	В-2. $f(x)=\lg(2x-6)+\arccos\frac{2x}{1+x^2}$.
В-3. $f(x)=2^{\sqrt{x^2-3x-10}}+\ln(x+1)$.	В-4. $f(x)=\arccos(\lg x)+\frac{1}{x-3}$.
В-5. $f(x)=\ln\frac{x}{x+4}-\arccos\frac{6+x}{3}$.	В-6. $f(x)=\arccos\frac{x-2}{4}-\log_{2x-5}3$.
В-7. $f(x)=\ln(\sin x)+\sqrt{\pi^2-x^2}$.	В-8. $f(x)=\ln(8-x)+\arcsin 10^x$.
В-9. $f(x)=\sqrt{6x-x^2-5}-\arccos\frac{x}{2}$.	В-10. $f(x)=\frac{x}{\ln(1-4x)}+\sqrt{x+3}$.
В-11. $f(x)=\sin(\ln x)-\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}$.	В-12. $f(x)=arctg\sqrt{2-x}+\ln(16-x^2)$.
В-13. $f(x)=arcctg(\ln(16-x^2))+\frac{x}{x^2-4}$.	В-14. $f(x)=\arcsin 3^x-\ln(8-x^2-2x)$.
В-15. $f(x)=\sqrt{4\pi^2-x^2}-\ln(\cos x)$.	В-16. $f(x)=\log_{x-3}7-\sqrt{x^2-8x+12}$.
В-17. $f(x)=\sqrt{1-5^x}+\arcsin\frac{x-1}{4}$.	В-18. $f(x)=\ln(tgx)+\arcsin x$.
В-19. $f(x)=\ln(4x-x^2)-\sqrt{\sin 0{,}5x}$.	В-20. $f(x)=arctg\sqrt{2-x}+\ln(16-x^2)$.
В-21. $f(x)=arctg\sqrt{4-x}+\ln(25-x^2)$.	В-22. $f(x)=2^{\sqrt{x^2-4}}-\arcsin\frac{x}{5}$.
В-23. $f(x)=\ln(1-4^x)+5\arccos\frac{x+1}{4}$.	В-24. $f(x)=\sqrt{\sin 0{,}5x}+\ln(4\pi^2-x^2)$.
В-25. $f(x)=3^{\sqrt{x^2-9}}-\ln(2-2^x)$.	В-26. $f(x)=arcctg\sqrt{x-5}+\ln(8x-x^2)$.
В-27. $f(x)=5^{\sqrt{\sin x}}+\log_2(9\pi^2-x^2)$.	В-28. $f(x)=\arccos(\log_2 x)-\sqrt{1-x^2}$.
В-29. $f(x)=\ln(x^2+6x)+\sqrt{49-x^2}$.	В-30. $f(x)=\log_2\sqrt{\cos x}+\arcsin x$.
В-31. $f(x)=\arcsin\frac{x^2}{16}+\ln(2-x)$.	В-32. $f(x)=\arccos\frac{x^2}{9}+2^{\sqrt{\ln x}}$.
В-33. $f(x)=\log_2(x^2-3x-10)+\sqrt{36-x^2}$.	В-34. $f(x)=\frac{x}{\ln(2+x)}-\sqrt{25-x^2}$.
В-35. $f(x)=\sqrt{\frac{x^2-3x+2}{x^2}}+\arcsin\frac{x}{5}$.	В-36. $f(x)=\log_2(1-3^x)+\arccos(2+x)$.
В-37. $f(x)=\sqrt{2^x-5^x}-\ln(4-x^2)$.	В-38. $f(x)=\ln(5^x-8^x)+\arcsin\frac{x^2}{4}$.
В-39. $f(x)=\ln(12+x-x^2)+\arcsin\frac{x}{3}$.	В-40. $f(x)=2^{\sqrt{\frac{x+3}{2-x}}}-\log_2(4-3x-x^2)$.

Задание 3

Вычислить указанные пределы.

В-1. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x-4}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{2x}$.

В-2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-5x-5x^3}{x-4}$.

В-3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{5+x}$.

В-4. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)^{x+2}$.

В-5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{3x^2+x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4+x^2-1}{7x^4+3x^3+x+1}$.

В-6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}^2 3x}{7x^2}$.

В-7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^2+4x-5}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x}\right)^{x+1}$.

В-8. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-4}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-4}{x^2+5x^3}$.

В-9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2+x^3}{x^2-2x^3}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{4}{x}\right)^{3x-5}$.

В-10. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+4}\right)^{x+1}$.

В-11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sin x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{x^2+1}\right)^{3x^2}$.

В-12. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+x^3+5x^5}{4x^5-x^2+x}$.

В-13. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x+4}\right)^{2x-5}$.

В-14. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2+1}{3x^2+2}\right)^{x^2+5}$.

В-15. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+3x+1}{x+5x^2-1}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\,5x}{\sin 3x}$.

В-16. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x+4}\right)^{3x-2}$.

В-17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{1-\cos 2x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4+x^3+2x}{5x^4+x+5}$;

В-18. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x-3}{\sqrt{8+x}-3}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x^2+1}{5x^2-1}\right)^{x^2}$.

В-19. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x^2}$.

В-20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{2+x}\right)^{x}$; $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{x-8}$.

В-21. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-7x+12}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x+1}\right)^{3x-1}$.

В-22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+3x}{x^4+x^2+2x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$.

В-23. $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}5x}{\sin 3x}$;

В-24. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$; $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 6x}{2x}\right)^{2+x}$.

В-25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x+x^2}-(1+x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-2x-1}{4x^3+2x^2+x}$.

В-26. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+3}{5x+1}\right)^{2+x}$.

В-27. $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{x+8}$; $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(x+h)-\sin(x-h)}{h}$.

В-28. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$; $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}\right)^{x^2}$.

В-29. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{x^2-2x+1}$; $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 4x}{x}\right)^{2/(x+2)}$.

В-30. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{x^2+1}\right)^{2x^2}$.

В-31. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^3+3}{3x^3+1}\right)^{2x^3+1}$.

В-32. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[7]{x}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+5}$.

В-33. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{2x-16}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-5x}{\sin 3x}$.

В-34. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{1+x}}{x^2-9}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x\cdot\operatorname{tg}x}{1-\cos 2x}$.

В-35. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x+3x^2}-(1+x)}{\sqrt[3]{x}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2+3x-1}{2x^2+5x+3}$.

В-36. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$; $\lim\limits_{x\to 1}(8-7x)^{\frac{2x}{x-1}}$.

В-37. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5+6x^4+3x^2+1}{6x^3-3x^5+x-1}$; $\lim\limits_{x\to 2}(7-3x)^{\frac{x}{x-2}}$.

В-38. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-3x+3}-1}{2x-2}$; $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\frac{x}{x-1}}$.

В-39. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{15x^2}{1-\cos 4x}$; $\lim\limits_{x\to 3}(7-2x)^{\frac{1}{2x-6}}$.

В-40. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+8x+15}{x^2+6x+5}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{\sin^2 2x}$.

Задание 4

Найти производную функции.

В-1. $y=\frac{x}{5}tg^5 x+\frac{e^{3x}}{\log_4(3-5x)}$.	В-2. $y=\frac{\ln^2 x}{x}-4^{1-3x}tg5x.$
В-3. $y=\frac{2^{1-3x}}{\cos(5x-2)}+x\ln^4 x.$	В-4. $y=x^2e^{5x}-\frac{\ln(2x-3)}{\sin^2 x}$.
В-5. $y=x\cos^3 x+\frac{\ln(1+e^x)}{3^{1-2x}}$.	В-6. $y=x\cos^3 x-\frac{5^{1-3x}}{\ln(6x-5)}$.
В-7. $y=x^2\ln(4x-1)-\frac{1+2^x}{\cos^4 x}$.	В-8. $y=x^3\ln(2-3x)+\frac{\cos^2 x}{4^{3x}}$.
В-9. $y=x^4 2^{1+3x}+\frac{\sin^2 x}{\ln(7x+3)}$.	В-10. $y=\frac{\cos(2x-1)}{x}-2^x\ln^5 x.$
В-11. $y=\frac{x^4-1}{\cos^2 x}-e^{5x}\ln^3 x.$	В-12. $y=x\sqrt{\sin x}+\frac{\ln^2 x}{e^{3x}}$.
В-13. $y=\frac{tg^3 x}{x}+e^{5x-1}\ln(1-3x)$.	В-14. $y=3x\sqrt[4]{\ln x}-\frac{\sin(2-3x)}{e^{5x}}$.
В-15. $y=2^x\ln(3x-5)-\frac{\sin^5 x}{\sqrt{x}}$.	В-16. $y=\frac{ctg^3 x}{\sqrt{3x-2}}+e^{5x-2}\ln(1+x^2)$.
В-17. $y=e^{5x}\sqrt{3x-1}+\frac{\ln^4 x}{\cos(1-7x)}$.	В-18. $y=2^{3x}\cos(2+5x)-\frac{\ln^5 x}{\sqrt{3+2x}}$.
В-19. $y=\frac{2^{\sin x}}{\ln(1+4x)}-\sqrt{3-2x}\,tg^3 x.$	В-20. $y=\frac{\ln^3 x}{\cos(3x+2)}+\sqrt[3]{tgx}\,2^{5x}$.
В-21. $y=3^{5x-2}\cos 4x-\frac{\sqrt{4+3x}}{\ln^3 x}$.	В-22. $y=2^{\cos x}\sqrt{5-3x}+\frac{ctg^4 x}{\ln(1-3x)}$.
В-23. $y=\frac{\sin\ln x}{\sqrt{2x+1}}+3^x tg^5 x.$	В-24. $y=\frac{\ln\sin x}{x}-\sqrt[3]{2x-1}\,e^{5x}$.
В-25. $y=\sqrt{ctgx}\log_3(2x+6)-\frac{e^{3x}}{\sqrt[3]{x}}$.	В-26. $y=5\sqrt[3]{\ln x}\sin(1-2x)+\frac{e^{3x-2}}{x}$.
В-27. $y=\sqrt[3]{\cos x}\,e^{2-3x}-\frac{\ln^5 x}{x^2}$.	В-28. $y=\frac{2^{5x+4}}{x}-\ln^4 x\,ctg(1-7x).$

В-29. $y=\dfrac{\sin(5-3x)}{x}+e^{1-2x}\ \ln_3^4 x.$	В-30. $y=\dfrac{x}{\ln(2+5x)}+5^{2x-1}\sin^5 x.$
В-31. $y=\dfrac{ctg^3 x}{\sqrt{x}}+6^{2-7x}\ln(2-5x).$	В-32. $y=\dfrac{\log_2(1-8x)}{\sin 2x}+e^{3x}\sqrt{1+6x}.$
В-33. $y=\dfrac{\ln^5 x}{\cos(1-3x)}-3^{2+x^2}\sqrt{(2-7x)}.$	В-34. $y=5^{2x+4}\cos^3 x-\dfrac{\ln tgx}{\sqrt{x}}.$
В-35. $y=\sqrt{1-3x}\,tg^4 x+\dfrac{2^{3-4x}}{\ln(1-5x)}.$	В-36. $y=\dfrac{\ln^2 x}{\sqrt{3x-1}}+e^{1-5x}\cos 3x.$
В-37. $y=\dfrac{2^{1-3x}}{\sin(2x+5)}-\sqrt{7x+2}\,\ln^4 x.$	В-38. $y=\sqrt[3]{1-4x}\ln^5 x+\dfrac{2^{3x-2}}{\cos(1-6x)}.$
В-39. $y=e^{7x}ctg^3 x+\dfrac{\log_2(3x-6)}{\sqrt{x}}.$	В-40. $y=\dfrac{\sin^2 x}{2^{5x}}-\sqrt{2x-3}\ln(1-5x).$

Задание 5

В-1. Докажите, что из всех прямоугольников, имеющих периметр 32 см, наибольшую площадь имеет квадрат.

В-2. Какой из цилиндров с объёмом 128π см^3 имеет наименьшую полную поверхность?

В-3. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 8 см. Найдите длину каждого катета, при которых площадь треугольника будет наибольшей.

В-4. Требуется изготовить ящик с крышкой, объём которого равен 288 см^3, а стороны основания относятся как 1:3. Каковы должны быть размеры ящика, чтобы его полная поверхность была наименьшей?

В-5. Какие размеры должен иметь цилиндр, площадь полной поверхности которого 96π см^2, чтобы его объём был наибольшим?

В-6. Каковы должны быть размеры цилиндрического сосуда ёмкостью 8π литров, открытого сверху, чтобы на его изготовление потребовалось наименьшее количество материала?

В-7. Докажите, что из всех прямоугольников площадью 400 см^2 квадрат имеет наименьший периметр.

В-8. Открытый кузов грузового автомобиля имеет вид прямоугольного параллелепипеда с площадью поверхности 2S. Каковы должны быть длина и ширина кузова, чтобы его объём был наибольшим, если известно, что отношение длины кузова к ширине равняется 5:2?

В-9. Консервная банка должна иметь форму цилиндра, ёмкостью 1 дм^3. Рассчитайте, каким должен быть радиус её оснований, чтобы площадь жестяного листа, израсходованного на изготовление банки, была наименьшей.

В-10. Образующая конического сосуда равна 25 см. Какой должна быть его высота, чтобы вместимость сосуда была наибольшей?

В-11. Определить наибольшую площадь прямоугольника, вписанного в круг радиуса 20 см.

В-12. Боковые стороны и меньшее основание трапеции равны по 10 см. Определит её большее основание так, чтобы площадь трапеции была наибольшей.

В-13. Найти размеры прямоугольника наибольшей площади, вырезанной из фигуры ограниченной линиями $y=\sqrt{x}$, $x=4$, $y=0$.

В-14. Площадь, занимаемая печатным текстом, составляет на странице книги 432 см^2. Ширина полей вверху и внизу страницы составляет по 2 см, а ширина полей боковых полей по 1,5 см. Каковы должны быть размеры страницы, чтобы количество израсходованной на неё бумаги было наименьшим?

В-15. Каковы должны быть ширина и высота прямоугольной балки, выпиленной из круглого бревна радиуса R, чтобы количество отходов было наименьшим?

В-16. Требуется огородить забором прямоугольный участок земли площадью 72 м^2, одна сторона которого примыкает к стене дома. Каковы должны быть размеры участка, чтобы длина забора была наименьшей?

В-17. Из квадратного листа жести со стороной 100 см, отрезая по углам равные квадраты и загибая края, составляют открытую прямоугольную коробку. Чему должна быть сторона выбрасываемых квадратов, чтобы получилась коробка наибольшей вместимости?

В-18. Требуется огородить забором прямоугольный участок земли, одна сторона которого примыкает к стене дома. Каковы должны быть размеры участка наибольшей площади, если длина забора 200 м?

В-19. Определить размеры открытого бассейна с квадратным дном объёмом 32 м^3 так, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.

В-20. Из круглого бревна данного диаметра 50 см требуется вырезать балку прямоугольного сечения так, чтобы она находясь в горизонтальном положении, оказала наибольшее сопротивление на изгиб(известно, что сопротивление изгибу прямо пропорционально произведению ширины сечения на квадрат высоты сечения).

В-21. От канала шириной a м под прямым углом к нему отходит канал шириной в м. Найти наибольшую длину бревна, которое можно сплавлять по этим каналам из одного в другой.

В-22. Найти положительное число, которое будучи сложено со своим квадратом , даёт наименьшую сумму.

В-22. Найти положительное число, которое будучи сложено с обратным ему числом, даёт наименьшую сумму.

В-23. Число 12 разбить на две части так, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

В-24. Из всех прямоугольников площадью 100 м^2 выбрать тот, у которого периметр минимальный.

В-25. Из всех прямоугольников с диагоналями 4 см выбрать тот, у которого наибольшая площадь.

В-26. Из всех равнобедренных треугольников с периметром 198 см найти треугольник с наибольшей площадью.

В-27. Сумма длин высоты и диаметра основания конуса равна 6. При какой длине радиуса основания объём конуса будет наибольшим?

В-28. Дом в форме прямоугольного паралеллепипеда имеет квадратный пол. Через потолок теряется в три раза больше теплоты, чем через стены (на квадратный метр); через пол теплота не теряется. при каких размерах этот дом будет терять минимум теплоты, если его объём 1500 м^3?

В-28. Спортплощадку площадью 9000 м^2 , имеющую форму прямоугольника, необходимо огородить с севера и юга деревянным забором. с востока и запада – проволочным. Установка одного метра деревянного забора обходится 5 рублей, проволочного – в два рубля. При каких размерах площадки оплата за установку забора будет наименьшей?

В-29. Проволоку, имеющую длину a, предполагают разрезать на две части, из которых одну требуется согнуть в окружность, а другую – в квадрат. При какой длине каждой из частей сумма площадей круга и квадрата окажется наибольшей?

В-30. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Периметр равен P. Каковы должны быть размеры окна, чтобы оно пропускало наибольшее количество света?

В-31. Требуется огородить забором прямоугольный участок земли площадью в 294 м^2 и разделить затем этот участок забором на две равные части. При каких линейных размерах участка длина забора окажется наименьшей?

В-32. При подготовке к экзамену студент за x дней изучает $\frac{x}{x+1}$ – ю часть курса и забывает $0{,}04x$ – ю часть. Сколько дней нужно затратить на подготовку, чтобы была изучена максимальная часть курса?

В-33. На координатной плоскости дана точка $M(2;3)$. Найти уравнение прямой, проходящей через точку M так, чтобы треугольник, образованный ею с положительными полуосями координат, имел наименьшую площадь.

В-34. Найти такое положительное число, чтобы разность между ним и его кубом была наибольшей.

В-35. Даны точки $A(0;3)$ и $B(4;5)$. На оси Ox найти такую точку M, чтобы длина ломаной AMB была наименьшей.

В-36. Диагональ осевого сечения прямого кругового цилиндра равна 12 см. Найти наибольший возможный объём этого цилиндра.

В-37. Из всех прямоугольных треугольников с гипотенузой, равной 20 см найти треугольник наибольшего периметра.

В-38. Известно, что сумма длин гипотенузы и одного из катетов равна 33 см. При какой длине гипотенузы площадь треугольника будет наибольшей?

В-39. Завод D нужно соединить шоссейной дорогой с прямолинейной железной дорогой, на которой расположен город A. Расстояние DB до железной дороги равно 20 км, расстояние AB по железной дороге равно 100 км. Стоимость перевозки по шоссе в $\sqrt{5}$ раз дороже стоимости перевозок по железной дороге. Как провести шоссе DP к железной дороге, чтобы стоимость перевозок от завода к городу была наименьшей?

В-40. Требуется построить открытый цилиндрический резервуар вместимость 100π м^3. Толщина стенок и дна резервуара 0,5 м. Каковы должны быть внутренние размеры резервуара (радиус основания и высота), чтобы расход материала был наименьшим?

Задание 6

Найти неопределенные интегралы

В-1. $\int \frac{1+\ln x}{x} dx$.

В-2. $\int \frac{x^2+\ln^2 x}{x} dx$.

В-3. $\int \frac{1+\ln(x-1)}{x-1} dx$.

В-4. $\int \frac{4\mathrm{arctg}x - x}{1+x^2} dx$.

В-5. $\int \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x} dx$.

В-6. $\int \frac{\mathrm{arctg}x + x}{1+x^2} dx$.

В-7. $\int x e^{x^2} dx$.

В-8. $\int \frac{(\arcsin x)^2 - 1}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

В-9. $\int \frac{x^2}{5-2x^3} dx$.

В-10. $\int \frac{\cos x}{(3\sin x+1)^3} dx$.

В-11. $\int \frac{\sin t}{(2\cos t+3)} dt$

В-12. $\int x 3^{2+x^2} dx$.

В-13. $\int \sqrt[3]{(3x-1)^2} dx$.

В-14. $\int \frac{x}{x^2+1} dx$.

В-15. $\int \frac{\cos x}{4+3\sin x} dx$.

В-16. $\int x^2 5^{x^3} dx$.

В-17. $\int \mathrm{tg} x dx$.

В-18. $\int \sqrt{x^4+16} \cdot x^3 dx$.

В-19. $\int \frac{x}{(x^2+5)^5} dx$.

В-20. $\int \mathrm{tg} x \cdot \ln\cos x \, dx$.

В-21. $\int (3-2\sin x)^3 \cos x \, dx$.

В-22. $\int \sqrt{x-1} \, dx$.

В-23. $\int \sqrt{4+5\sin x} \cos x \, dx$.

В-24. $\int x(x^2+1)^4 dx$.

В-25. $\int \sqrt{\sin x}\cos x\,dx$.

В-26. $\int \frac{x}{\sin^2 x^2}dx$.

В-27. $\int \frac{x^2}{\sqrt{9+2x^3}}dx$.

В-28. $\int \sin\left(\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{x^2}$.

В-29. $\int e^{3x+5}dx$.

В-30. $\int (5+6x)^{17}dx$.

В-31. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$.

В-32. $\int e^x\sqrt{e^x+5}\,dx$.

В-33. $\int \frac{\ln^5 x}{x}dx$.

В-34. $\int \frac{dx}{(\arcsin x)\sqrt{1-x^2}}$.

В-35. $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}dx$.

В-36. $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$.

В-37. $\int \frac{\mathrm{tg}x}{\cos^2 x}dx$.

В-38. $\int \sqrt[3]{(4-5x)^2}\,dx$.

В-39. $\int e^{x^5}\cdot x^4 dx$.

В-40. $\int \sqrt[5]{(6x+5)^4}\,dx$.

Задание 7

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

В-1. $y=8x-x^2-7, y=0$.

В-2. $y=6x-3x^2$, $y=0$.

В-3. $y=x^2+2$, $y=2x+2$.

В-4. $y=x^2-4x-5$, $y=0$.

В-5. $y=\frac{1}{x}$, $x=2$, $x=3$, $y=0$.

В-6. $y=x^3$, $y=0$, $x=0$, $x=2$.

В-7. $y=x^3$, $y=x^2$, $x=-1$, $x=0$.

В-8. $y^2=4x$, $x^2=4y$.

В-9. $y^2-3x=0$, $x-3=0$.

В-10. $y=x^2$, $y=x+2$.

В-11. $y=4-x^2$, $y=x^2-2x$.

В-12. $y=2x-x^2+3$, $y=x^2-4x+3$.

В-13. $y=(x+1)^2$, $y^2=x+1$.

В-14. $x=4-y^2$, $x=y^2-2y$.

В-15. $x=4-(y-1)^2$, $x=y^2-4y+3$.

В-16. $y=(x-1)^2$, $y^2=x-1$.

В-17. $x=\sqrt{4-y^2}$, $x=0$, $y=0$, $y=1$.

В-18. $y=\arccos x$, $y=0$, $x=0$.

В-19. $y=\sqrt{4-x^2}$, $y=0$, $x=0$, $x=1$.

В-20. $y=1+x^2$, $y=2$.

В-21. $y=\frac{x^2}{2}-x+2$, $y=x$, $x=0$.

В-22. $y=\frac{1}{3}x^2-2x+4$, $y=10-x$.

В-23. $y=e^x$, $y=0$, $x=2$, $x=0$.

В-24. $y=x^3$, $y=\sqrt{x}$.

В-25. $y=\frac{5}{x}$, $y=6-x$.

В-26. $y=0$, $y=-x+2$, $y=\sqrt{x}$.

В-27. $xy=2$, $x+2y-5=0$.

В-28. $y=\frac{9}{x}$, $y=x$, $x=9$, $y=0$.

В-29. $y=x^2$, $y=\sqrt[3]{x}$.

В-30. $xy=3$, $x+y=4$.

В-31. $y=x^2$, $y=2\sqrt{2x}$.

В-32. $y=x^4-2x^2+5, y=1, x=0, x=1$.

В-33. $y=0$, $y=-x+2$, $y=\sqrt{x}$.

В-34. $y=\frac{1}{x^2}$, $y=0$, $x=\frac{1}{2}$, $x=2{,}5$.

В-35. $y = 5/x$, $y = 6 - x$.

В-36. $y = \frac{4}{x^2}$, $x = 1$, $y = x - 1$.

В-37. $y = \cos x$, $y = 1 + \frac{2}{\pi}x$, $x = \frac{\pi}{2}$.

В-38. $y = \sin 6x$, $x = 0$, $x = \pi$, $y = 0$.

В-39. $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{4 - 3x}$, $y = 0$.

В-40. $y = -x^2$, $y = 2e^x$, $x = 0$, $x = 1$.

Задание 8

В-1–10. Бросаются три игральные кости. Найти вероятность того, что на верхних гранях появятся числа очков, сумма которых делится на *n*.

Данные приведены в таблице.

Номера вариантов	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n	4	5	3	8	9	6	7	5	4	3

В-11–20. Бросаются три игральные кости. Определить вероятность того, что на верхних гранях появятся числа очков, сумма которых не превосходит *n*.

Данные приведены в таблице.

Номера вариантов	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
n	10	11	9	12	13	8	14	7	15	6

В-21–30. Бросаются три игральные кости. Найти вероятность того, что на верхних гранях появятся числа очков, сумма которых больше *n*.

Данные приведены в таблице.

Номера вариантов	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
n	12	11	10	15	12	13	9	8	14	7

В-31–40. Бросаются три игральные кости. Найти вероятность того, что на верхних гранях появятся числа очков, произведение которых делится на *n*.

Данные приведены в таблице.

Номера вариантов	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
n	5	4	3	8	9	6	5	4	3	8

Задание 9

В-1–15. Ваша фамилия и имя записаны с помощью карточек. Карточки с буквами фамилии и имени смешивают и вынимают без возврата по одной.

Найти вероятность того, что буквы вынимаются в порядке следования в вашей фамилии и имени.

В-16–28. Имеются изделия четырёх сортов, причем число изделий i–го сорта равно n_i, i=1, 2, 3, 4. Для контроля наудачу берутся m изделий. Определить вероятность того, что среди них m_1 первосортных, m_2, m_3 и m_4 второго, третьего и четвертого сорта соответственно $\left(\sum_{i=1}^{4} m_i = m\right)$.

Данные приведены в таблице.

Номера вариантов	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
n_1	10	12	16	12	18	12	18	20	14	22	10	14	16
n_2	5	10	10	8	20	14	16	14	9	20	8	12	12
n_3	6	8	14	6	24	16	14	10	7	10	6	10	10
n_4	4	9	12	5	10	18	12	8	6	8	4	8	6
m_1	2	4	4	2	3	6	4	5	4	5	2	4	6
m_2	3	3	5	3	4	4	3	2	3	2	4	3	3
m_3	4	1	7	2	5	3	2	4	3	3	2	2	2
m_4	2	3	3	4	7	2	2	2	2	1	1	2	3

В-29–40. Среди n лотерейных билетов k выигрышных. Наудачу взяли m билетов. Определить вероятность того, что среди них l выигрышных.

Данные приведены в таблице.

Номера вариантов	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
n	10	12	12	9	8	11	12	9	9	8	10	10
l	2	3	2	2	2	2	2	2	2	3	4	5
m	4	8	8	4	4	5	5	3	3	4	6	7
k	6	5	3	6	5	7	4	5	6	5	5	7

Задание 10

В-1–40. Устройство состоит из трех независимых элементов, работающих в течение времени Т безотказно соответственно с вероятностями p_1, p_2, p_3. Найти вероятность того, что за время Т выйдет из строя:

а) только один элемент;

б) хотя бы один элемент.

Значения параметров вычислить по следующим формулам:

$$k=|14{,}9-V|:100,$$

$$p_1=1-k,\ p_2=0{,}9-k,\ p_3=0{,}85-k,\ V \text{ — номер варианта.}$$

Задание 11

В-1–8. Производятся четыре выстрела по мишени. Вероятность поражения мишени первым выстрелом равна p_1, вторым — p_2, третьим — p_3, четвертым — p_4. Случайная величина X (CBX) — число поражений мишени. Найти закон распределения указанной дискретной CBX и ее функцию распределения $F(x)$. Вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратичное отклонение $\sigma(X)$. Построить график функции распределения $F(x)$.

Данные приведены в таблице.

Номера задач	1	2	3	4	5	6	7	8
p_1	0,3	0,4	0,2	0,6	0,4	0,2	0,2	0,35
p_2	0,6	0,6	0,5	0,8	0,7	0,4	0,6	0,45
p_3	0,5	0,7	0,7	0,8	0,9	0,5	0,7	0,8
p_4	0,8	0,9	0,8	0,7	0,9	0,8	0,75	0,9

В-9–16. Вероятность сдачи данного экзамена для каждого из n студентов равна p. Случайная величина X (CBX) — число студентов, сдавших экзамен. Найти закон распределения указанной дискретной CBX и ее функцию распределения $F(x)$. Вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратичное отклонение $\sigma(X)$. Построить график функции распределения $F(x)$.

Данные приведены в таблице.

Номера задач	9	10	11	12	13	14	15	16
n	5	4	3	4	6	5	6	3
p	0,6	0,8	0,7	0,7	0,6	0,7	0,8	0,8

В-17–24. Вероятность того, что студент найдет в библиотеке нужную ему книгу, равна p. Случайная величина X (CBX) — число библиотек, которые он может посетить, если ему доступны n библиотек. Найти закон распределения указанной дискретной CBX и ее функцию распределения $F(x)$. Вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратичное отклонение $\sigma(X)$. Построить график функции распределения $F(x)$.

Данные приведены в таблице.

Номера задач	17	18	19	20	21	22	23	24
n	6	5	4	3	4	3	6	7
p	0,4	0,6	0,8	0,7	0,9	0,8	0,6	0,3

В-25–32. В партии, содержащей n изделий, имеется m изделий с дефектами. Наудачу отобрали $к$ изделий для проверки их качества. Случайная величина X ($СВX$) — число дефектных изделий, содержащихся в указанной выборке. Найти закон распределения указанной дискретной $СВX$ и ее функцию распределения $F(x)$. Вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратичное отклонение $\sigma(X)$. Построить график функции распределения $F(x)$.

Данные приведены в таблице.

Номера задач	25	26	27	28	29	30	31	32
n	20	30	20	30	40	40	16	24
m	5	6	4	5	8	5	4	6
$к$	4	3	3	4	5	4	3	4

В-33–40. Вероятность успешной сдачи первого экзамена для данного студента равна p_1, второго экзамена — p_2, третьего экзамена — p_3. Случайная величина X ($СВX$) — число сданных экзаменов. Найти закон распределения указанной дискретной $СВX$ и ее функцию распределения $F(x)$. Вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратичное отклонение $\sigma(X)$. Построить график функции распределения $F(x)$.

Данные приведены в таблице.

Номера задач	33	34	35	36	37	38	39	40
p_1	0,5	0,4	0,3	0,4	0,6	0,7	0,8	0,6
p_2	0,6	0,6	0,7	0,6	0,8	0,8	0,8	0,9
p_3	0,8	0,7	0,9	0,6	0,9	0,9	0,9	0,9

Задание 12.

В-1–10. При изучении некоторой дискретной случайной величины в результате 20 независимых наблюдений получена выборка.

Требуется: а) составить вариационный ряд; б) составить таблицу частот; в) построить полигон.

Данные выборки приведены в таблице.

Номер варианта	Данные выборки
1	10; 11; 12; 6; 6; 8; 9; 9; 7; 14; 13; 10; 11; 6; 7; 8; 11; 12; 13; 14
2	13; 14; 12; 13; 14; 14; 10; 11; 11; 6; 7; 8; 8; 9; 9; 10; 11; 11; 14; 13
3	6; 8; 8; 14; 7; 12; 12; 14; 8; 9; 10; 11; 9; 9; 9; 13; 9; 10; 11; 7

4	14; 13; 12; 6; 8; 8; 9; 8; 6; 10; 11; 11; 7; 8; 7; 7; 14; 14; 9; 10
5	9;8; 9; 9; 7; 6; 6; 10; 11; 14; 14; 13; 10; 11; 14; 14; 12; 6; 7; 10
6	14; 13; 6; 7; 6; 6; 7; 8; 14; 13; 13; 10; 11; 12; 9; 9; 8; 6; 9; 10
7	10; 11; 6; 7; 8; 10; 6; 7; 8; 10; 11; 14; 13; 12; 9; 6; 10; 11; 13; 14
8	9; 8; 7; 9; 9; 6; 8; 8; 7; 8; 8; 6; 14; 12; 10; 11; 10; 11; 13; 14
9	14; 6; 14; 6; 7; 6; 8; 6; 13; 14; 6; 7; 9; 10; 11; 12; 14; 12; 7; 7
10	14; 6; 13; 7; 12; 6; 13; 7; 11; 10; 9; 7; 6; 8; 9; 8; 9; 10; 14; 11

В-11–20. Двадцатью абитуриентами на вступительных экзаменах получены определенные количества баллов.

Требуется: а) составить вариационный ряд; б) составить таблицу частот; в) построить полигон частот.

Данные выборки приведены в таблице.

Номер вариан–та	Количества баллов
11	15; 30; 12; 16; 30; 29; 18; 28; 18; 30; 15; 16; 25; 26; 25; 24; 26; 20; 20; 26
12	29; 25; 24; 16; 17; 15; 12; 16; 16; 18; 10; 28; 29; 25; 16; 17; 24; 17; 18; 17
13	24; 25; 30; 12; 15; 18; 19; 25; 24; 25; 20; 21; 16; 17; 18; 20; 21; 16; 19; 15
14	22; 20; 25; 30; 15; 22; 24; 22; 30; 15; 16; 17; 20; 20; 22; 25; 15; 16; 22; 20
15	20; 19; 16; 19; 18; 20; 25; 19; 18; 25; 30; 16; 20; 18; 25; 15; 20; 19; 22; 29
16	15; 18; 19; 16; 18; 30; 14; 18; 16; 25; 17; 14; 15; 17; 25; 25; 30; 29; 30; 16
17	30; 27; 26; 28; 27; 28; 26; 15; 16; 19; 16; 15; 16; 16; 26; 28; 28; 26; 30; 27
18	16; 20; 25; 23; 20; 25; 16; 18; 18; 23; 29; 27; 30; 29; 27; 28; 30; 16; 17; 20
19	24; 26; 29; 26; 24; 27; 24; 24; 15; 18; 19; 17; 18; 20; 23; 20; 24; 26; 15; 22
20	26; 28; 20; 22; 30; 16; 26; 28; 28; 26; 15; 17; 18; 20; 25; 30; 19; 20; 22; 16

В-21–30. Имеются результаты измерения роста 100 студентов:

Рост (см)	154–158	158–162	162–166	166–170	170–174	174–178	178–182	182–186
Число студентов	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7	n_8

Преобразовать данную таблицу в таблицу частот. Выбрав середины интервалов за значения роста, составить дискретную таблицу частот и построить полигон.

Данные приведены в таблице.

Номера вариантов	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
n_1	8	10	6	10	6	8	5	7	4	6
n_2	14	12	10	16	18	12	12	15	11	12
n_3	20	18	24	18	18	18	25	20	22	26
n_4	32	30	30	34	36	28	36	30	32	31
n_5	12	10	14	10	10	14	12	12	15	10
n_6	8	10	6	8	6	10	6	9	9	8
n_7	4	6	6	2	4	6	3	4	4	5
n_8	2	4	4	2	2	4	1	3	3	2

В-31–40. Имеются данные о распределении предприятий области по росту выработки на одного рабочего (в % к предыдущему году):

%	80–90	90–100	100–110	110–120	120–130
Число предприятий	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5

Преобразовать данную таблицу в интервальную таблицу частот. Выбрав середины интервалов за значение роста выработки, составить дискретную таблицу частот и построить полигон.

Данные приведены в таблице.

Номера вариантов	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
n_1	2	1	3	4	8	9	10	3	4	5
n_2	14	10	12	20	25	30	22	15	12	10
n_3	60	50	55	40	35	46	56	62	58	56
n_4	20	30	25	30	22	13	8	17	22	24
n_5	4	9	5	6	10	2	4	3	4	5

Решение типовых задач

1. Найти расстояние между точками $A(-1; -2)$ и $B(-4; 2)$.

Решение. Расстояние d между двумя точками $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ плоскости определяется по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Применяя эту формулу, находим расстояние между точками $A(-1; -2)$ и $B(-4; 2)$:

$$d=\sqrt{(-4+1)^2+(2+2)^2}=\sqrt{25}=5.$$

2. Найти угловой коэффициент прямой, зная, что прямая проходит через точки $M(2; -1)$ и $P(-1; 8)$.

Решение. Уравнение прямой, проходящей через точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, имеет вид

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

Подставляя в уравнение вместо x_1, y_1, x_2, y_2 координаты точек M и P, получаем

$$\frac{y-(-1)}{8-(-1)}=\frac{x-2}{-1-2},$$

отсюда

$$y=-3x+5.$$

Искомое уравнение прямой мы привели к уравнению с угловым коэффициентом, т. е. к уравнению вида $y=kx+b$.

Таким образом, угловой коэффициент искомой прямой $k=-3$.

Угловой коэффициент можно найти также и по формуле $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$:

$$k=\frac{8-(-1)}{-1-2}=-3.$$

3. Даны вершины треугольника: $A(3; 2)$, $B(6; -2)$, $C(-5; -4)$. Найти уравнение медианы проведённой из вершины B.

Решение. Пусть точка D — середина отрезка AC. Для определения координат точки D применяем формулы деления отрезка пополам:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad x=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

Находим координаты точки D:

$$x=\frac{3-5}{2}=-1,\quad y=\frac{2-4}{2}=-1;\quad D(-1;-1).$$

Подставив координаты точек B и D в уравнение $\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$, находим уравнение медианы BD:

$$\frac{y+2}{-1+2}=\frac{x-6}{-1-6},\quad y+2=\frac{x-6}{-7},$$

$$x+7y+8=0\ (BD).$$

4. Найти точку пересечения прямых $2x+3y-8=0$ и $x-2y+3=0$.

Решение. Решая систему уравнений:

$$\begin{cases}2x+3y-8=0,\\ x-2y+3=0,\end{cases}$$

получаем x=1, y=2. Следовательно, данные прямые пересекаются в точке M(1; 2).

5. Написать уравнение прямой, проходящей через точку A(–1;1) и перпендикулярной прямой $3x–y–2=0$.

Решение. Искомая прямая l_1 перпендикулярна прямой l_2: $3x–y–2=0$, а потому их угловые коэффициенты k_{l_1} и k_{l_2} удовлетворяют условию перпендикулярности двух прямых, т. е. $k_{l_1}=-\frac{1}{k_{l_2}}$.

Так как k_{l_2}=3, то $k_{l_1}=-\frac{1}{3}$.

Зная координаты точки A(–1; 1) и угловой коэффициент $k_{l_1}=-\frac{1}{3}$ и пользуясь уравнением прямой $y–y_1=k(x-x_1)$, проходящей через данную точку в данном направлении, составляем уравнение искомой прямой:

$$y-1=-\frac{1}{3}(x+1),\quad 3y-3=-x-1,\quad x+3y+2=0.$$

6. Найти уравнение окружности, если известно, что концы одного из диаметров ее имеют координаты A(2; –4) и B(–6; 2).

Решение. Уравнение окружности с центром $O(a, b)$ и радиусом R имеет вид

$$(x–a)^2+(y–b)^2=R^2.$$

Так как по условию задачи AB — диаметр окружности, то середина отрезка AB, т. е. точка E(–2; –1), является центром окружности.

Кроме того, AB=10, поэтому $AE=EB$=5. Следовательно, радиус окружности R=5.

Подставив в уравнение $(x–a)^2+(y–b)^2=R^2$ R=5, a=–2, b=–1, получим уравнение искомой окружности:

$$(x+2)^2+(y+1)^2=25.$$

7. Найти область определения функции

$$y=\sqrt{\lg\frac{5x-x^2}{4}}.$$

Решение. Функция определена при тех значениях x, для которых

$$\lg\frac{5x-x^2}{4}\ge 0.$$

Это неравенство будет выполнено, если

$$\frac{5x-x^2}{4}\ge 1, \text{ или } x^2–5x+4\le 0.$$

Решая последнее неравенство, находим $1\le x\le 4$, то есть $D(y)$=[1; 4].

8. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$.

Решение. Здесь имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Чтобы ее раскрыть, умножаем числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю. После этого можно будет сократить на x^2 и воспользоваться теоремой о пределе дроби.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2-1}{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

9. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+5x+6}{4x^2+x+1}$.

Решение. Мы имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, так как здесь $\lim\limits_{x\to\infty}(3x^2+5x+6)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}(4x^2+x+1)=\infty$. Для ее раскрытия предварительно числитель и знаменатель дроби $\frac{3x^2+5x+6}{4x^2+x+1}$ почленно разделим на x^2. Следовательно, получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5x+6}{4x^2+x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}.$$

Но $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6}{x^2}=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$. В результате имеем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5x+6}{4x^2+x+1}=\frac{3}{4}.$$

10. Найти производную функции

$$y=\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Решение. $$y'=\frac{1}{1+\frac{x^2}{1-x^2}}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}-x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=(1-x^2)\frac{1-x^2+x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

11. Бак цилиндрической формы должен вмещать $V_л$ воды. Каковы должны быть его размеры, чтобы поверхность (без крышки) была наименьшей?

Решение. Имеем

$$V=\pi x^2 y,$$

где x — радиус основания цилиндра, а y — его высота, откуда $y=\frac{V}{\pi x^2}$.

Поверхность $S=\pi x^2+2\pi xy=\pi x^2+\frac{2V}{x}$.

Исследуем функцию $S=\pi x^2+\frac{2V}{x}$ на минимум:

$$S'(x) = 2\pi x - \frac{2V}{x^2} = 0; \quad x = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}; \quad S''(x) = 2\pi + \frac{4V}{x^3},$$

$$S''\left(\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}\right) > 0,$$

т. е. в точке $x = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ функция $S(x)$ имеет минимум.

Итак, радиус цилиндра $x = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$, высота $y = \frac{V}{\pi x^2} = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$, следовательно, $x = y = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$.

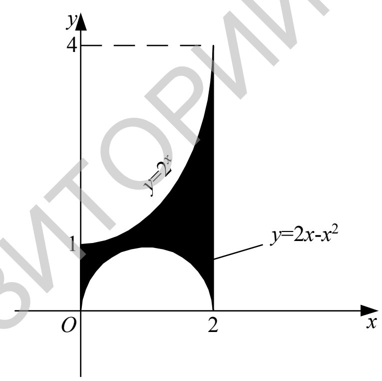
12. Найти неопределенный интеграл

$$\int \frac{\cos \ln x}{x} dx.$$

Решение. $\int \frac{\cos \ln x}{x} dx = \int \cos \ln x d(\ln x) = \sin \ln x + C$.

13. Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямыми x=0, x=2 и кривыми $y=2^x$, $y=2x-x^2$.

Решение.



$$S = \int_0^2 \left(2^x - \left(2x - x^2\right)\right) dx = \left.\frac{2^x}{\ln 2}\right|_0^2 - \left.\left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\right|_0^2 = \frac{3}{\ln 2} - \frac{4}{3}.$$

14. Брошены три игральные кости. Какова вероятность того, что на верхних гранях выпадут только четные числа очков?

Решение. Определим испытание и его результат, т. е. элементарное событие. Испытанием является бросание трех игральных костей; результатом — одно из сочетаний очков 1, ..., 6 на верхних гранях трех костей.

Исследуемое событие A — на верхних гранях появились только четные числа очков. Вероятность события A вычислим с помощью формулы $P(A)=\frac{m}{n}$, т. е. вероятность события A равна отношению числа благоприятствующих элементарных событий для A к общему числу элементарных событий испытания.

Итак, получаем:

$$n=6\cdot6\cdot6=216,\ m=3\cdot3\cdot3=27,$$

$$P(A)=\frac{27}{216}=0{,}125.$$

15. Слово «МАТЕМАТИКА» составлено из карточек, на каждой из которых написана одна буква. Затем карточки смешивают и вынимают без возврата по одной. Найти вероятность случая, когда буквы вынимаются в порядке заданного слова.

Решение. Испытание заключается в вынимании карточек с буквами в случайном порядке без возврата. Элементарным событием является полученная последовательность букв. Событие A состоит в получении нужного слова «МАТЕМАТИКА».

Элементарные события являются перестановками из 10 букв, значит, имеем $n=10!$

Некоторые буквы в слове «МАТЕМАТИКА» повторяются (М — 2 раза, А — 3 раза, Т — 2 раза), поэтому возможны перестановки, при которых слово не изменяется. Их число равно $m=2!\cdot3!\cdot2!=24$.

Таким образом,

$$P(A)=\frac{24}{10!}=\frac{1}{151200}.$$

16. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка 0,9, для второго — 0,8, для третьего — 0,7. Стрелки независимо друг от друга сделали по одному выстрелу. Какова вероятность того, что хотя бы один из них попадет в мишень.

Решение. Пусть события A, B, C — соответственно попадание в мишень 1, 2 и 3–го стрелка, D — хотя бы одно попадание в мишень. D можно представить как событие, противоположное $\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$ (ни одного попадания). Тогда имеем:

$$p(D)=1-p(\overline{A})p(\overline{B})p(\overline{C})=1-0{,}1\cdot0{,}2\cdot0{,}3=0{,}994.$$

17. По мишени проводится 4 независимых выстрела с вероятностью попадания при каждом выстреле $p=0{,}8$. Найти закон распределения дискретной случайной величины X, равной числу попаданий в мишень, и ее функцию распределения $F(x)$.

Решение. Возможные значения случайной величины X: 0, 1, 2, 3, 4. Соответствующие вероятности вычисляемой по формуле Бернулли:

$$P(X=0)=C_4^0\cdot 0{,}8^0\cdot 0{,}2^4=0{,}0016,$$
$$P(X=1)=C_4^1\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2^3=0{,}0256,$$
$$P(X=2)=C_4^2\cdot 0{,}8^2\cdot 0{,}2^2=0{,}1536,$$
$$P(X=3)=C_4^3\cdot 0{,}8^3\cdot 0{,}2=0{,}4096,$$
$$P(X=4)=C_4^4\cdot 0{,}8^4\cdot 0{,}2^0=0{,}4096.$$

Закон распределения X представится таблицей:

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,0016	0,0256	0,1536	0,4096	0,4096

Проверка: 0,0016+0,0256+0,1536+0,4096+0,4096=1.

Функция распределения $F(x)$ случайной величины X имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases} 0,\ \textit{если}\ x\le 0, \\ 0{,}0016,\ \textit{если}\ 0<x\le 1, \\ 0{,}0272,\ \textit{если}\ 0<x\le 2, \\ 0{,}1808,\ \textit{если}\ 2<x\le 3, \\ 0{,}5904,\ \textit{если}\ 3<x\le 4, \\ 1,\ \textit{если}\ x>4. \end{cases}$$

18. Случайная величина X задана рядом распределения

x_i	3	5	7	11
p_i	0,14	0,20	0,49	0,17

Вычислить математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$ случайной величины X.

Решение. Математическое ожидание $M(X)$ вычисляем по формуле $M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$:

$$M(X)=3\cdot 0{,}14+5\cdot 0{,}2+7\cdot 0{,}49+11\cdot 0{,}17=6{,}72.$$

Для нахождения дисперсии воспользуемся формулой

$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2:$$
$$M(X^2)=3^2\cdot 0{,}14+5^2\cdot 0{,}2+7^2\cdot 0{,}49+11^2\cdot 0{,}17=50{,}84,$$
$$D(X)=50{,}84-(6{,}72)^2=5{,}6816.$$

19. При изучении некоторой дискретной случайной величины в результате 40 независимых наблюдений получена выборка:

10, 13, 10, 9, 9, 12, 12, 6, 7, 9,
8, 9, 11, 9, 14, 13, 9, 8, 8, 7,
10, 10, 11, 11, 11, 12, 8, 7, 9, 10,
14, 13, 8, 8, 9, 10, 11, 11, 12, 12.

Требуется: а) составить вариационный ряд; б) составить таблицу частот.

Решение. а) Выбирая различные варианты из выборки и располагая их в возрастающем порядке, получим вариационный ряд: 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14.

б) Для нахождения частот $\mu_i = \frac{k_i}{40}$ предварительно подсчитаем для каждой варианты соответствующие кратности k_i: k_i= 1, 3, 6, 8, 6, 6, 5, 3, 2.

Таблица частот:

α_i	6	7	8	9	10	11	12	13	14
μ_i	$\frac{1}{40}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{6}{40}$	$\frac{8}{40}$	$\frac{6}{40}$	$\frac{6}{40}$	$\frac{5}{40}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{2}{40}$

ЛИТЕРАТУРА

1. Артемьева Е. Ю. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике для психологов. М., 1969.
2. Баврин И. И. Высшая математика. М., 1980.
3. Гусак А. А. Высшая математика: В 2 т. Мн., 1984.
4. Гутер Р. С., Овчинский Б. В. Основы теории вероятностей. М., 1967.
5. Лобоцкая Н. Л. Основы высшей математики. Мн., 1978.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

КИБАЛКО Петр Игнатьевич

ШИЛИНЕЦ Владимир Адамович

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ–ЗАОЧНИКОВ

Методические рекомендации

Редактор Л. М. Кореневская
Техническое редактирование и компьютерная верстка А. А. Пакало

Подписано в печать .200 . Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная.
Гарнитура Arial. Печать офсетная. Усл. печ. л. Уч.–изд. л.
Тираж 100 экз. Заказ

Издатель и полиграфическое исполнение:
Учреждение образования «Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка».
ЛИ № 02330/0133496 от 01.04.04.
ЛП № 02330/0131508 от 30.04.04.
220050, Минск, Советская, 18.